0.1 Vector Bundle

fiber が $\mathbf{R}^n$（$\mathbf{C}^n$）で $p^{-1}(b)$ にも局所自明化により $\mathbf{R}$（$\mathbf{C}$）上のベクトル構造が導入できるファイバー束を n 次実（複素）ベクトル束と呼ぶ。

Definition 0.1.1

$\xi = (E, p, B)$ が fiber が $\mathbf{R}^n$ であるファイバー束であり、${}^\forall b \in B$ に対し、$p^{-1}(b)$ が $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間であり、局所自明化の制限

$$\varphi : \{b\} \times \mathbf{R}^n \longrightarrow p^{-1}(b)$$

がベクトル空間としての同型であるとき ξ を n 次実ベクトル束と呼ぶ。

$\mathbf{R}$ の代わりに $\mathbf{C}$ を用いて、n 次複素ベクトル束が定義できる。特に区別しない場合には単にベクトル束と呼んでしまう事もある。以下の性質は実、複素の双方で成り立つものなので特に区別しない。

$p^{-1}(b)$ のベクトル構造に関すること以外の証明はすべてファイバー束を参考にすればいい。

Definition 0.1.2

$\xi = (E, p, B)$ と $\xi' = (E', p', B')$ を共に n 次ベクトル束とする。

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\
B \arrow[r, "\tilde{f}"'] & B'
\end{tikzcd}$$

を可換とする写像の組、$(f, \tilde{f}) : (E, B) \longrightarrow (E', B')$ をファイバーを保つ写像（fiber preserving map）と呼び、$f : \xi \longrightarrow \xi'$ とかく。また、このとき、

$$f_{|_{p^{-1}(b)}} : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(\tilde{f}(b))$$

が導かれるが、これがベクトル空間の同型となるとき、f を束写像（bundle map）と呼ぶ。さらに、$\xi' = (E', p', B)$ で $\tilde{f} = 1_B$ の状況で f が束写像のとき、f はベクトル束の同型と呼ぶ。またこのような同型が存在するとき、ξとξ' は同型と呼び、$\xi \cong \xi'$ とかく。

Example 0.1.3

$B \times \mathbf{R}^n \longrightarrow B$ を第一成分への射影とすると、これは n 次ベクトル束である。これを自明なベクトル束と呼び、ε^n であらわす。

Theorem 0.1.4

$T = \{ \ (x, y) \in S^n \times \mathbf{R}^{n+1} \mid x \cdot y = 0 \ \}$ で定義し、$T \longrightarrow S^n$ を射影とするとこれは n 次ベクトル束である。
これを球面 S^n の接束（tangent bundle）と呼ぶ。

Definition 0.1.5

n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ と $g : X \longrightarrow B$ に対し、$g^*(\xi) = (E', p', X)$ を、

$$E' = \{ \ (x, e) \in X \times E \mid g(x) = p(e) \ \} \ , \ p'(x, e) = x$$

で定義するとこれは n 次ベクトル束である。
また、$p^*(g) : g^*(\xi) \longrightarrow E$ を $p^*(g)(x, e) = e$ で定義すれば、

$$(p^*(g), g) : (E', X) \longrightarrow (E, B)$$

は束写像である。$g^*(\xi)$ を ξの g による pull back と呼ぶ。

pull back の性質はファイバー束や fibration で散々やったので確認だけ。

Theorem 0.1.6

$\xi = (E, p, B)$ を n 次ベクトル束とし、$g : B' \longrightarrow B$ と $h : B'' \longrightarrow B'$ をそれぞれ写像とするとき、$(g \circ h)^*(\xi) \cong h^*(g^*(\xi))$ である。

Theorem 0.1.7

$\xi = (E, p, B)$ と $\xi' = (E', p', B')$ を共に n 次ベクトル束とし、$g : \xi \longrightarrow \xi'$ を束写像とする。このとき、$g^*(\xi') \cong \xi$ である。

Theorem 0.1.8

$\xi = (E, p, B)$ を n 次ベクトル束とし、$f, g : X \longrightarrow B$ を $f \simeq g$ とする。X を paracompact Hausdorff 空間とすると、$f^*(\xi) \cong g^*(\xi)$ となる。

Definition 0.1.9

n 次ベクトル束 $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ と m 次ベクトル束 $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ に対し、

$$\xi_1 \oplus \xi_2 = (E, p, B)$$

を $E = \{\ (e_1, e_2) \in E_1 \times E_2 \mid p_1(e_1) = p_2(e_2)\ \}$, $p(e_1, e_2) = p_1(e_1)$ で定義するとこれは $n+m$ 次ベクトル束となる。ただし、$p^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$ のベクトル構造は $p_1^{-1}(b) \oplus p_2^{-1}(b)$ で与えられているとする。

これを ξ_1 と ξ_2 の Whitney 和とよぶ。Whitney 和については以下のような性質がある。

Theorem 0.1.10

1. $\xi_1 \cong \xi_1'$ かつ、$\xi_2 \cong \xi_2'$ ならば、$\xi_1 \oplus \xi_2 \cong \xi_1' \oplus \xi_2'$
2. $\xi_1 \oplus \xi_2 \cong \xi_2 \oplus \xi_1$
3. $(\xi_1 \oplus \xi_2) \oplus \xi_3 \cong \xi_1 \oplus (\xi_2 \oplus \xi_3)$
4. $\xi \oplus \varepsilon^0 \cong \xi$ (ε^0は 0 次の自明なベクトル束)
5. $g^*(\xi_1 \oplus \xi_2) \cong g^*(\xi_1) \oplus g^*(\xi_2)$

Definition 0.1.11

n 次ベクトル束 $\xi_1 = (E_1, p_1, B)$ と m 次ベクトル束 $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ に対し、

$$\xi_1 \otimes \xi_2 = (E, p, B)$$

を次のように定義する。$E = \coprod_{b \in B} p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$ とおき、$e_1 \otimes e_2 \in p_1^{-1}(b) \otimes p_2^{-1}(b)$ に対し、$p(e_1 \otimes e_2) = b$ で定義する。もちろん E, p は集合と写像のレベルであるので、E の位相構造を考える。

$$\varphi_1 : p_1^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbf{R}^n\ ,\ \varphi_2 : p_2^{-1}(V) \longrightarrow V \times \mathbf{R}^m$$

をそれぞれ ξ_1 , ξ_2 の局所自明化とする。$\mathbf{R}^n \otimes \mathbf{R}^n = \mathbf{R}^{nm}$ であるので、

$$\varphi : V \times \mathbf{R}^{nm} \longrightarrow p^{-1}(V)$$

を $\varphi(b, x \times y) = \varphi_1(b, x) \otimes \varphi_2(b, y)$ で定義する。この φ は全単射であるが連続かどうか定かでない・このとき次の２条件

1. このように定義されるすべての φ は連続となる。
2. B のすべての座標近傍 V に対し、$p^{-1}(V)$ は E の開集合となる。

を満たすように E に位相構造を導入する事ができる。これにより、p も連続となり、φ は $\xi_1 \otimes \xi_2$ の局所自明化になるので、$\xi_1 \otimes \xi_2$ は nm 次ベクトル束である。これを ξ_1 と ξ_2 のテンソル積とよぶ。

whitney 和の時と同様に次の式が成り立つ。

Theorem 0.1.12

1. $\xi_1 \cong \xi_1'$ かつ、$\xi_2 \cong \xi_2'$ ならば、$\xi_1 \otimes \xi_2 \cong \xi_1' \otimes \xi_2'$
2. $\xi_1 \otimes \xi_2 \cong \xi_2 \otimes \xi_1$
3. $(\xi_1 \otimes \xi_2) \otimes \xi_3 \cong \xi_1 \otimes (\xi_2 \otimes \xi_3)$
4. $\xi \otimes \varepsilon^1 \cong \xi \qquad$ (ε^1は 1 次の自明なベクトル束)
5. $g^*(\xi_1 \otimes \xi_2) \cong g^*(\xi_1) \otimes g^*(\xi_2)$

Remmark 0.1.13

$\xi_1 \oplus \xi_2$ も $p^{-1}(b) \oplus p^{-1}(b) = p_1^{-1}(b) \times p_2^{-1}(b)$ の直和からテンソル積と同様の構成で $\xi_1 \oplus \xi_2$ に行き着く事ができる。このことを踏まえると次の式が成り立つ。

$$(\xi_1 \oplus \xi_2) \otimes \xi_3 \cong (\xi_1 \otimes \xi_3) \oplus (\xi_2 \otimes \xi_3)$$

これらのことを見わたすとベクトル束が環の構造に非常に近い物を持っていることに気づく。だが、残念ながら問題はある。一つは和に関する逆元が保障されていない点だ。ξ に対し、$\xi \oplus \xi' \cong \varepsilon^0$ となる ξ' は一般には存在しない。もう一つは $\cong$ という関係は n 次ベクトル束の間の同値関係になっていたという事。$\oplus$ や $\otimes$ により次元は変動するので、$\cong$ でカバーするのは大変である。このような問題を取り払って構成されるのが K 群と呼ばれる $K(X)$ あるいは、$\widetilde{K}(X)$ である。

Definition 0.1.14

底空間が異なるベクトル束でも Whiteny 和、そしてテンソル積に順ずるものが定義できる。

$$\xi_1 = (E_1, p_1, B_1)\ ,\ \xi_2 = (E_2, p_2, B_2)$$

をそれぞれ、n 次と m 次のベクトル束とする。このとき、

$$\xi_1 \times \xi_2 = (E_1 \times E_2, p_1 \times p_2, B_1 \times B_2)$$

は $m+n$ 次のベクトル束となり、これを ξ_1 と ξ_2 のカルテシァン積と呼ぶ。また、

$$\xi_1 \hat{\otimes} \xi_2 = (E, p, B_1 \times B_2)$$

を、$(b_1, b_2) \in B_1 \times B_2$ に対し fiber が $p_1^{-1}(b_1) \otimes p_2^{-1}(b_2)$ となるようにテンソル積の時と同じように構成できる。これを、ξ_1とξ_2 の外テンソル積と呼ぶ。

これらと Whitney 和、テンソル積との関係は以下のとおり。

Proposition 0.1.15

ベクトル束、$\xi_1 = (E_1, p_1, B)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B)$ に対し、$d : B \longrightarrow B \times B$ を対角写像としたとき、

$$\xi_1 \oplus \xi_2 \cong d^*(\xi_1 \times \xi_2)\quad ,\quad \xi_1 \otimes \xi_2 \cong d^*(\xi_1 \hat{\otimes} \xi_2)$$

Proposition 0.1.16

ベクトル束、$\xi_1 = (E_1, p_1, B_1)$, $\xi_2 = (E_2, p_2, B_2)$ に対し、$q_1 : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_1$, $q_2 : B_1 \times B_2 \longrightarrow B_2$ をそれぞれ射影としたとき、

$$\xi_1 \times \xi_2 \cong q_1^*(\xi_1) \oplus q_2^*(\xi_2)\quad ,\quad \xi_1 \hat{\otimes} \xi_2 \cong q_1^*(\xi_1) \otimes q_2^*(\xi_2)$$

ついでにもう一つベクトル空間の k 重外積べきの概念を用いて、ベクトル束の外積べきを定義する。

Definition 0.1.17

n 次ベクトル束 $\xi = (E, p, B)$ が与えられたとき、$k \geqq 0$ に対し、$\binom{n}{k}$ 次元ベクトル束

$$\wedge^k \xi = (E', p', B)$$

を、ファイバーが $\wedge^k(p^{-1}(b))$ となるようにテンソル積と同様の構成を行う。$\wedge^k \xi$ を ξ の k 重外積べきと呼ぶ。